Αλγεβρικές Δομές 17/2 ①

Ι

Σύνολο

Πράξη που ορίζεται

$\mathbb{N}$ - φυσικοί αριθμοί — $+ \, , \, \cdot$ — $\begin{cases} 0_+ \to \text{ουδέτερο στοιχείο} \\ 1 \to \text{μοναδιαίο} \end{cases}$

$\mathbb{Z}$ - ακέραιοι αριθμοί — $+ \, , \, \cdot \, , \, -$ — - // -

$\mathbb{Q}$ - ρητοί $\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$ — $+ \, , \, \cdot \, , \, - \, , \, :$

$\mathbb{R}$ - πραγματικοί

$\mathbb{C}$ - φανταστικοί

} Αφορούν την ανάλυση όχι την άλγεβρα

$$\boxed{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}}$$

• Μια πράξη λέμε ότι ορίζεται αν για κάθε ζεύγος στοιχείων που ανήκει σε ένα σύνολο και το στοιχείο μετά την πράξη ανήκει στο ίδιο σύνολο

• Το $\mathbb{Z}$ με την πρόσθεση $(\mathbb{Z}, +)$ αποτελεί ομάδα

• $\frac{1}{2} \equiv \frac{2}{4} \equiv \frac{-1}{-2} \equiv \frac{\pm 3}{\pm 6}$ (Δεν είναι ίσα αλλά ισοδύναμα)

• Το $(\mathbb{Q}, +)$ αποτελεί ομάδα

• Το $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ομάδα όπου $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$

$\{1, 2\}$ ← σύνολο

$(1, 2)$ ← διάταξη $\quad (1,2) \neq (2,1)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $X_1, \ldots, X_k$ είναι το σύνολο

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k = \{ \underbrace{(a_1, \ldots, a_k)}_{\downarrow} \mid a_i \in X_i \}$$

κ-άδες με ενδιαφέρει η σειρά

π.χ. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$

π.χ. $f: \{1,2\} \to \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ με $f(x) = x^2$

Η f είναι καλά ορισμένη $\begin{matrix} (1,-1) \\ (2,-4) \end{matrix} \in A \times B$

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Μια σχέση R μεταξύ των συνόλων A και B είναι υποσύνολο του $A \times B$ $R \subseteq A \times B$
- Εάν η R ικανοποιεί την ιδιότητα: $\forall x \in A \ \exists!$ ζεύγος $(x,y) \in R$ τότε η R καλείται απεικόνιση

π.χ. $A = \{1,2\}$ $B = \{1,2,3\}$ $R \subseteq A \times B$ ώστε $xRy \Leftrightarrow x-y$ άρτιος

$(1,1), (1,3) \in R$ $(2,2) \in R$

$A = B = \mathbb{Z}$ $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $xRy \Leftrightarrow x-y$ διαιρείται από το 3

$(2,5), (2,-1), (3,3k), (3l,3k), (3l+1, 3k+1), (3l+2, 3k+2)$

Γενικά $n = 3l + u$ με $u = 0,1,2$

$u=0$ $(3l, 3k)$

$u=1$ $(3l+1, 3k+1)$

$u=2$ $(3l+2, 3k+2)$

$\{[0]_3, [1]_3, [2]_3\} = \mathbb{Z}_3$

Εστω $n \in \mathbb{Z}$ να βρούμε τους $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $(n,m) \in R$

$$n = \begin{cases} n = 3l & (1) \quad (3l, 3k') \\ n = 3l+1 & (2) \quad (3l+1, 3k'+1) \\ n = 3l+2 & (3) \quad (3l+2, 3k'+2) \end{cases}$$

Αν $(n,m) \in R \Longleftrightarrow n-m$ διαιρείται από το 3

$n - m = 3k \overset{(1)}{\Rightarrow} 3l - m = 3k \Rightarrow m = 3(l-k) = 3k'$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} 3l+1-m = 3k \Rightarrow m = 3(l+k)+1 = 3k'+1$

Σχέσεις Ισοδυναμίας

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια σχέση $R \subseteq A \times A$ καλείται σχέση ισοδυναμίας αν

1) $\forall a \in A \Rightarrow (a,a) \in R$ αυτοπαθής

2) Αν $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ συμμετρική

3) Αν $(a,b) \in R$ και $(b,\gamma) \in R \Rightarrow (a,\gamma) \in R$ μεταβατική

Π.χ 1) Η ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας

$A = \{1, 2, 3\}$ $(1,1), (2,2), (3,3) \in R$

2) $A = \{$φοιτητές του Μαθ. Τμημ.$\}$

$x, y \in A$ $(x,y) \in R \Longleftrightarrow x$ και y έχουν περάσει τον ίδιο αριθμό μαθημάτων

* αναχλαστική ισχύει
συμμετρική ισχύει
μεταβατική ισχύει

$\left.\begin{matrix} \text{αναχλαστική ισχύει} \\ \text{συμμετρική ισχύει} \\ \text{μεταβατική ισχύει} \end{matrix}\right\} \Rightarrow R$ σχέση ισοδυναμίας

Το σύνολο A διαμερίζεται (σπάει) σε τόσα κομμάτια όσα τα μαθήματα για να πάρουμε πτυχίο +1 (0 μαθήματα, 1, 2, ...)

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Έστω R σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A και $x \in A$. Με $\bar{x}$ ή $[x]$ θα συμβολίζουμε όλα τα στοιχεία του A τα οποία είναι ισοδύναμα με το x

$$\bar{x} \text{ ή } [x] = \{ y \,/\, y \in A \text{ και } (x,y) \in R \}$$

<u>ΛΗΜΜΑ</u>

Αν $[x]$ και $[y]$ κλάσεις ισοδυναμίας της R τότε $[x] = [y]$ ή $[x] \cap [y] \neq \emptyset$

<u>Απόδειξη</u>

1) Αν $[x] \cap [y] = \emptyset$ ισχύει
2) Αν $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$

Έστω $z \in [x] \cap [y] \Leftrightarrow (x,z), (z,y) \in R$

Θέλουμε $[x] \subset [y]$ και $[y] \subset [x]$

Έστω ~~[illegible]~~ $\omega \in [x]$ πρέπει $\omega \in [y]$

$$\left.\begin{matrix} (\omega, z) \in R \\ (z, y) \in R \end{matrix}\right\} \longrightarrow (\omega, y) \in R \Rightarrow \omega \in [y]$$

Ομοίως βρίσκω και $[y] \subset [x]$

Πόρισμα

Έστω R σχέση ισοδυναμίας στο A. Τότε η ένωση των κλάσεων ισοδυναμίας μας δίνει το A. Δηλαδή οι κλάσεις ισοδυναμίας αποτελούν διαμέριση του A

Έστω $[x_1], \ldots [x_k]$ οι κλάσεις της R

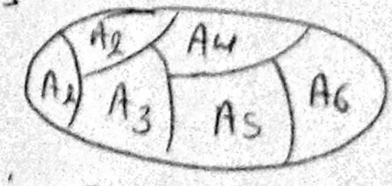
$$\bigcup_{i=1}^{k} [x_i] = A \quad \Big(\text{ισχύει } [x_i] \subseteq A \Rightarrow \bigcup [x_i] \subseteq A \Big)$$

Έστω $y \in A \Rightarrow y \in [y]$ και $\exists\, x_i \in A$ με $[x_i] = [y] \Rightarrow$

$$\Rightarrow y \in [x_i] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} [x_j] \Rightarrow A = \bigcup_{j=1}^{k} [x_j]$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A σύνολο. Μια διαμέριση του A είναι μια συλλογή υποσυνόλων του $A_1, \ldots, A_k$ ώστε $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$ και $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$



ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω A σύνολο και $A_1, \ldots, A_k$ μια διαμέριση του.
Τότε ορίζεται σχέση ισοδυναμίας στο A ώστε οι κλάσεις της να είναι τα υποσύνολα $A_1, \ldots, A_k$

Απόδειξη

$$A = \bigcup_{i}^{k} A_i \text{ με } A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

Θα λέμε $(x, y) \in R \iff \exists\, t \in \{1, \ldots k\}$ με $x, y \in A_t$

Δείχνουμε ότι αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας.

Π.χ. Δίνεται η σχέση $(x,y) \in R \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ <u>ανν</u> $x-y$ διαιρείται από το n,

Να δείξετε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρεθούν οι κλάσεις ισοδυναμίας.

<u>Λύση</u>

i) Ανακλαστική $(x,x) \in R \Leftrightarrow x-x=0$ διαιρ. από n ισχύει

ii) Αν $(x,y) \in R \Leftrightarrow x-y = n\kappa \Leftrightarrow y-x = n(-\kappa) \Leftrightarrow (y,x) \in R$

iii) Αν $(x,y) \in R \Leftrightarrow x-y = n\kappa$ και $(y,z) \in R \Leftrightarrow y-z = n\lambda \Leftrightarrow x-z = n(\kappa+\lambda) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,z) \in R$

n τυχαίος ακέραιος

$$m = n\pi + \upsilon \quad \begin{cases} \upsilon = 0 \\ \upsilon = 1 \\ \upsilon = 2 \\ \vdots \\ \upsilon = n-1 \end{cases}$$

$n\pi+3-(n\pi'+4) = n(\pi-\pi')-1 \Rightarrow n\pi+3$ δεν είναι ισοδύναμο με το $n\pi'+4$

Αν $n\pi+\upsilon$ και $n\pi'+\upsilon \Leftrightarrow (n\pi+\upsilon, n\pi'+\upsilon) \in R \Leftrightarrow n\pi+\upsilon-(n\pi'+\upsilon) =$

$= n(\pi-\pi')$

Δύο αριθμοί m και m' θα είναι ισοδύναμοι $\Leftrightarrow$ έχουν το ίδιο υπόλοιπο

Άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας καθορίζονται από τα υπόλοιπα

$[0] = \{n\kappa / \kappa \in \mathbb{Z}\}$

$[1] = \{n\kappa+1 / \kappa \in \mathbb{Z}\}$

$\vdots$

$[n-1] = \{n\kappa+n-1 / \kappa \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z} = [0] \sqcup [1] \sqcup [2] \sqcup \ldots \sqcup [n-1]$

$\{[0], [1], \ldots, [n-1]\} = \mathbb{Z}_n$